

verschieben. Unsere Überlegungen können daher zunächst nur Aussagen über das auf der Rotationsachse anzutreffende  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  liefern. Es läßt sich zeigen, daß diese auch für beliebige andere Punkte gelten, sofern die oben für  $\mathbf{v}$  erhobenen Forderungen dort wenigstens von  $\mathbf{v}'$  befriedigt werden. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, weil wir die hier betrachteten Verhältnisse ohnehin später ausführlicher behandeln möchten<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> K.-H. RÄDLER, Z. Naturforsch., in Vorbereitung.

7. Auf Grund ähnlicher Betrachtungen, wie wir sie hier erläutert haben, kann man auch für  $\mathbf{v}$ -Felder mit weniger einfachen Symmetrieeigenschaften Aussagen über  $g_{iq}, g_{iqr}, \dots$  gewinnen und damit erkennen, wie  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  aufgebaut ist. Es bleiben aber grundsätzlich gewisse skalare Koeffizienten unbestimmt. Diese müssen anderweitig, etwa mit Hilfe von (30), ermittelt werden. Natürlich ist es möglich, daß einige von ihnen und damit die entsprechenden Summanden in  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  verschwinden.

## Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien

### II. Turbulenzbedingte Leitfähigkeits- und Permeabilitätsänderungen

K.-H. RÄDLER

Institut für Magnetohydrodynamik Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1851—1860 [1968]; eingegangen am 22. August 1968)

In a foregoing paper the foundations for an electrodynamics of mean fields in turbulently moving electrically conducting media were developed. With the method demonstrated there a special case is treated. The turbulence is supposed to deviate from a homogeneous isotropic one showing reflexion symmetry, only due to a gradient of intensity, i. e. of the mean square velocity. The calculations are carried out for small intensities. As a result, expressions for the modified conductivity introduced for homogeneous turbulence in the foregoing paper are given and discussed. The effect of the intensity gradient is illustrated by a simple example. Furthermore, a possibility is shown for describing the general result in terms of modified conductivity and permeability.

### Einführung

1. In der vorangehenden Untersuchung<sup>1</sup>, die im folgenden kurz mit I bezeichnet wird, haben wir die Grundzüge einer Elektrodynamik der mittleren Felder in turbulent bewegten, elektrisch leitenden kontinuierlichen Medien entwickelt.

Als Ausgangspunkt dienten Maxwellsche Gleichungen und ergänzende Materialgleichungen mit den in der nichtrelativistischen Magnetohydrodynamik üblichen Vernachlässigungen. Es wurde die magnetische Kraftflußdichte  $\mathbf{B}$  eingeführt, weiterhin die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$ , die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$ , die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , mit der sich das Medium bewegt. Sowohl die magnetische Permeabilität  $\mu$  als auch die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  galten als orts- und zeitunabhängig. Feldgrößen wie  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{j}$  müssen, wenn  $\mathbf{v}$  einer turbulenten Bewegung entspricht, gleich diesem unregelmäßige räumliche und

zeitliche Schwankungen aufweisen. In Anbetracht dessen sind mittlere Feldgrößen wie  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{j}}$  und  $\bar{\mathbf{v}}$  mit einem weniger verwickelten räumlichen und zeitlichen Verlauf erklärt sowie im Mittel verschwindende Differenzen zwischen den ersteren und den letzteren wie  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{j}'$  und  $\mathbf{v}'$  eingeführt worden.

Wir haben die Aufgabe jener Elektrodynamik der mittleren Felder darin gesehen, das Verhalten von  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$  und  $\bar{\mathbf{j}}$  zu bestimmen, wenn  $\bar{\mathbf{v}}$  und gewisse für  $\mathbf{v}'$  kennzeichnende Größen gegeben sind. Unsere Überlegungen lieferten zunächst die Gln. (I. 5) und (I. 6), nämlich

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{j}}, \quad \text{div } \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}}, \quad \bar{\mathbf{j}} = \sigma (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}),$$

und weiterhin die Feststellung, daß  $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$  als Funktional von  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{v}'$  aufgefaßt werden darf. Die genannte Aufgabe ist als grundsätzlich gelöst anzu-

<sup>1</sup> K.-H. RÄDLER, Z. Naturforsch. **23 a**, 1841 [1968].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

sehen, wenn dieses Funktional ermittelt und in (1) eingetragen worden ist.

Als einfachstes Beispiel haben wir Verhältnisse betrachtet, unter denen  $\bar{\mathbf{v}}$  verschwindet und  $\mathbf{v}'$  eine homogene isotrope und spiegelsymmetrische Turbulenz beschreibt. Dabei läßt sich der Einfluß von  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  auf die mittleren elektromagnetischen Feldgrößen, wenigstens für nicht zu starke Orts- und Zeitabhängigkeit von  $\bar{\mathbf{B}}$ , durch Einführung einer turbulenzbedingten Leitfähigkeitsänderung berücksichtigen. Bei der Besprechung weiterer Beispiele ist unter anderem auf eine mit nichtverschwindendem  $\text{grad } \bar{v}^{7/2}$  zusammenhängende turbulenzbedingte Permeabilitätsänderung hingewiesen worden. Darüber hinaus konnten wir ein weitgehend allgemeines Verfahren begründen, nach dem sich  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  in seiner Abhängigkeit von  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{v}'$  berechnen läßt.

Das Ziel dieser Untersuchung besteht darin, turbulenzbedingte Leitfähigkeits- und Permeabilitätsänderungen auf Grund jenes Verfahrens zu ermitteln und genauer zu erörtern.

2. Zur Berechnung des Terms  $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$  übernehmen wir (I. 29), also

$$(\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'})_i = g_{iq}^{(00)} \bar{B}_q + \sum_{\kappa+\nu \geq 1} g_{iqr\dots t}^{(\kappa\nu)} \frac{\partial^{\kappa+\nu} \bar{B}_q}{\partial x_r \dots \partial x_t \partial t^\nu} \quad (2)$$

Wir setzen von vornherein  $\bar{\mathbf{v}} = 0$  und beschränken uns auf die erste Näherung bezüglich kleiner  $\mathbf{v}'$ . Der Einfachheit halber soll weiterhin  $t_0 \rightarrow -\infty$  gelten. Mit (I. 18) und (I. 26) gelangt man dann von (I. 30), wenn dort die Integrationsvariablen  $\xi$  und  $\tau$  durch  $-\xi + \mathbf{x}$  und  $-\tau + t$  ersetzt werden, leicht zu

$$\begin{aligned} R_{jp}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = & \frac{1}{3} \left\{ \bar{v}^{7/2}(\mathbf{x}, t) \left[ g_0(t; \xi, \tau) \delta_{jp} + (f_0(t; \xi, \tau) - g_0(t; \xi, \tau)) \frac{\xi_j \xi_p}{\xi^2} \right] \right. \\ & + \frac{\partial \bar{v}^{7/2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} \xi_l \left[ g_1(t; \xi, \tau) \delta_{jp} + (f_1(t; \xi, \tau) - g_1(t; \xi, \tau) - h_1(t; \xi, \tau) - k_1(t; \xi, \tau)) \frac{\xi_j \xi_p}{\xi^2} \right] \\ & \left. + \frac{\partial \bar{v}^{7/2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} h_1(t; \xi, \tau) \xi_p + \frac{\partial \bar{v}^{7/2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} k_1(t; \xi, \tau) \xi_j \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die erste Zeile entspricht der homogenen isotropen und spiegelsymmetrischen Turbulenz, bei der  $\bar{v}^{7/2}$  nicht von  $\mathbf{x}$  abhängt, und die weiteren Terme be-

$$\begin{aligned} g_{iqr\dots t}^{(\kappa\nu)} = & \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{npq} \frac{(-1)^{\kappa+\nu}}{\kappa! \nu!} \\ & \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} R_{jp}(\mathbf{x}, t; -\xi, -\tau) \right. \\ & \left. \times \xi_m \xi_r \dots \xi_t \tau^\nu d^3 \xi d\tau \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Wie üblich wurde  $|\xi| = \xi$  gesetzt, es ist

$$G(\xi, \tau) = \left( \frac{\mu \sigma}{4 \pi \tau} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu \sigma \xi^2}{4 \tau} \right), \quad (4)$$

und wir haben den Korrelationstensor

$$R_{jp}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \overline{v_j'(\mathbf{x}, t) v_p'(\mathbf{x} + \xi, t + \tau)} \quad (5)$$

eingeführt. Das erste Glied auf der rechten Seite von (2) entspricht  $\kappa = \nu = 0$ , und (3) gilt dafür ebenso wie für  $\kappa + \nu \geq 1$ .

3. Um  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$  ausrechnen zu können, hat man die vorangehenden Beziehungen durch einen Ansatz für den Korrelationstensor  $R_{jp}$  zu ergänzen.

Im Hinblick auf turbulenzbedingte Leitfähigkeitsänderungen interessiert dabei der Fall der homogenen isotropen und spiegelsymmetrischen Turbulenz. Dieser ist in der hydrodynamischen Literatur<sup>2</sup> eingehend untersucht worden. Für die Behandlung turbulenzbedingter Permeabilitätsänderungen kommt es auf ein nicht durchweg verschwindendes  $\text{grad } \bar{v}^{7/2}$  an, was einer weder homogenen noch isotropen Turbulenz entspricht. Wir haben uns an anderer Stelle<sup>3</sup> mit einem solchen Fall befaßt. Es wurde vorausgesetzt, daß sich alle Abweichungen von Homogenität, Isotropie und Spiegelsymmetrie allein durch  $\text{grad } \bar{v}^{7/2}$  ausdrücken lassen und dieses jeweils über räumliche und zeitliche Abstände, über die merkbare Korrelationen bestehen, als konstant anzusehen ist. Unter diesen Bedingungen ergibt sich

schreiben die Abweichungen, welche durch ein endliches  $\text{grad } \bar{v}^{7/2}$  hervorgerufen werden. Die Bedeutung der offensichtlich dimensionslosen Funktionen

<sup>2</sup> Beispielsweise G. K. BATCHELOR, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press 1956, oder SHIH-I-PAI, Viscous Flow Theory II — Turbulent Flow, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton/New Jersey 1957. Im Gegensatz zu den in unserer Untersuchung I getroffenen

festlegungen werden Isotropie- und Spiegelungsbedingung in diesen Darstellungen nicht getrennt und beide zusammen als Isotropiebedingung bezeichnet.

<sup>3</sup> K.-H. RÄDLER, Z. Angew. Math. Mech., in Vorbereitung.

$f_0, g_0, f_1, g_1, h_1$  und  $k_1$  läßt sich leicht erkennen. Bezeichnen wir die Komponente von  $\mathbf{v}'$  in  $\xi$ -Richtung mit  $v_\xi'$ , so gilt

$$\overline{v_\xi'(\mathbf{x}, t) v_\xi'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)} = \frac{\xi_j \xi_p}{\xi^2} R_{jp}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \overline{v^2}(\mathbf{x}, t) f_0(t; \xi, \tau) + \frac{\partial \overline{v^2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} \xi_l f_1(t; \xi, \tau) \right\}.$$

Mithin erweist sich  $f_0$  als normierte longitudinale Korrelationsfunktion für  $\text{grad } \overline{v^2} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ , und  $f_1$  tritt beim Übergang von dieser zu der für  $\text{grad } \overline{v^2} \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$  auf. Ganz ähnlich hängen  $g_0$  und  $g_1$  mit normierten transversalen sowie  $h_1$  und  $k_1$  mit gemischten Korrelationsfunktionen zusammen.

Schon ohne daß  $\mathbf{v}'$  weiteren Einschränkungen unterworfen wird, sind  $f_0, g_0, f_1, g_1, h_1$  und  $k_1$  nicht völlig frei wählbar. Außer Normierungsbedingungen wie

$$f_0(t; 0, 0) = 1 \quad (8)$$

bestehen noch andere Beziehungen, von denen wir nur

$$\begin{aligned} f_1(t; \xi, 0) &= \frac{1}{2} f_0(t; \xi, 0), \\ h_1(t; \xi, 0) + k_1(t; \xi, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

vermerken. Führt man beispielsweise  $\text{div } \mathbf{v}' = 0$  ein,

so ergeben sich natürlich zusätzliche Verknüpfungen. Dazu gehört

$$f_1(t; \xi, \tau) + h_1(t; \xi, \tau) + k_1(t; \xi, \tau) = \frac{1}{2} f_0(t; \xi, \tau), \quad (10)$$

worauf wir später zurückkommen werden.

Eine weitere Eigenschaft von  $f_0, g_0, f_1, g_1, h_1$  und  $k_1$  besteht darin, daß sie nur für nicht zu große  $\xi$  und  $|\tau|$  wesentlich von Null abweichen. Auf eine genaue Erklärung verzichtend, führen wir eine Korrelationslänge  $\lambda_K$  und eine Korrelationszeit  $\tau_K$  ein und betrachten  $f_0, g_0, f_1, \dots$  als verschwindend klein, sobald  $\xi \gg \lambda_K$  oder  $|\tau| \gg \tau_K$  gilt. Experimentelle Ergebnisse lassen vermuten, daß  $f_0$  niemals negativ ist<sup>4</sup>. Im stationären Falle, in dem  $f_0$  nicht von  $t$  abhängt, liegt deshalb und wegen (8) ein Ansatz wie

$$f_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi/\lambda_K)^2 - \frac{1}{2}(\tau/\tau_K)^2\right) \quad (11)$$

nahe. Wir werden ihn unten als Beispiel verwenden.

### Berechnung von $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$

1. Wir greifen auf (3) zurück und betrachten zunächst  $g_{iq}^{(0v)}$ . Dabei kommt es nur auf die Terme von  $R_{jp}$  an, die in den  $\xi_i$  antisymmetrisch sind. Mit

$$\varepsilon_{kmn} \varepsilon_{npq} = \delta_{kp} \delta_{mq} - \delta_{kq} \delta_{mp} \quad (12)$$

und (6) ergibt sich so

$$\begin{aligned} g_{iq}^{(0v)} &= \varepsilon_{ijk} \frac{(-1)^v}{3 v!} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \frac{\partial \overline{v^2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} [f_1(t; \xi, -\tau) \xi_j \xi_l \delta_{kq} - h_1(t; \xi, -\tau) (\xi_j \xi_l - \xi^2 \delta_{jl}) \delta_{kq} \\ &\quad - (h_1(t; \xi, -\tau) - k_1(t; \xi, -\tau)) \delta_{jl} \xi_k \xi_q] \tau^v d^3 \xi d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Die räumliche Integration läßt sich unter Verwendung von Kugelkoordinaten teilweise ausführen. Wir setzen  $\xi_i = \xi e_i$ , wobei die  $e_i$  lediglich Winkelvariable enthalten. Sofern  $\oint \dots d\Omega$  eine Integration über den vollen Raumwinkel bedeutet, gilt

$$\oint d\Omega = 4\pi, \quad \oint \frac{4}{3} \pi e_i e_j d\Omega = \pi \delta_{ij}. \quad (14)$$

Die erste dieser Beziehungen ist ohne weiteres klar. Um die zweite zu begründen, bemerken wir zunächst, daß das Integral einen isotropen Tensor zweiter Stufe darstellt, sich also nur um einen skalaren Faktor von  $\delta_{ij}$  unterscheiden kann. Der letztere läßt sich beispielsweise aus der Bedingung bestimmen, daß jene zweite Beziehung bei Verjüngung wegen  $e_i e_i = 1$  in die erste übergehen muß. Mit Hilfe von (14) folgt

$$g_{iq}^{(0v)} = \varepsilon_{iqj} \frac{(-1)^v}{3 v!} \frac{\partial \overline{v^2}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} a^{(0v)}(t) \quad (15)$$

$$\text{und} \quad a^{(0v)} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \int \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} (f_1(t; \xi, -\tau) + h_1(t; \xi, -\tau) + k_1(t; \xi, -\tau)) \xi^3 \tau^v d\xi d\tau. \quad (16)$$

<sup>4</sup> C. C. LIN u. W. H. REID, in S. FLÜGGE, Handbuch der Physik VIII/2, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963, S. 448.

Bei  $g_{iqr}^{(1\nu)}$  kann man ähnlich vorgehen. Es erweisen sich jedoch gerade die Terme von  $R_{jp}$  als wesentlich, die in den  $\xi_i$  symmetrisch sind. An Stelle von (13) ergibt sich

$$g_{iqr}^{(1\nu)} = \varepsilon_{ijq} \frac{(-1)^\nu}{3 \nu!} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \overline{v}^2(\mathbf{x}, t) f_0(t; \xi, -\tau) \xi_j \xi_r \tau^\nu d^3 \xi d\tau. \quad (17)$$

Unter Verwendung von (14) erhält man daraus

$$g_{iqr}^{(1\nu)} = \varepsilon_{ijr} \frac{(-1)^\nu}{3 \nu!} \overline{v}^2(\mathbf{x}, t) c^{(0\nu)}(t) \quad (18)$$

und

$$c^{(0\nu)} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} f_0(t; \xi, -\tau) \xi^3 \tau^\nu d\xi d\tau. \quad (19)$$

2. Die Rechnungen lassen sich leicht auf beliebige  $g_{iqrst}^{(\nu)}$  ausdehnen, sofern man über die entsprechende Verallgemeinerung von (14) verfügt. Wir schreiben

$$\oint e_i e_j e_k e_l \dots e_p e_q d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1} E_{ijkl\dots pq}^{(2n)}, \quad (20)$$

wobei das Integral wie auch  $E_{ijkl\dots pq}^{(2n)}$  einen Tensor mit der geraden Stufenzahl  $2n$  darstellen soll. Für  $n=0$  und  $n=1$  entspricht dies (14), und es muß

$$E^{(0)} = 1, \quad E_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} \quad (21)$$

gelten. Da es sich bei dem Integral um einen isotropen Tensor mit gerader Stufenzahl handelt, kann dieses und damit  $E_{ijkl\dots pq}^{(2n)}$  für  $n \geq 2$  durch eine Linearkombination der Ausdrücke dargestellt werden,

von denen einer  $\delta_{ij} \delta_{kl} \dots \delta_{pq}$  lautet und die anderen durch Permutation der Indizes daraus hervorgehen; es gibt unter ihnen  $(2n)!/2^n n!$  verschiedene. Dank der Symmetrie des Integrals bezüglich aller Indizes handelt es sich bei jener Linearkombination, abgesehen von einem skalaren Faktor, einfach um die Summe der letzteren. Eine einmalige Verjüngung in (20) muß wegen  $e_i e_i = 1$  die entsprechende Beziehung für ein um 1 erniedrigtes  $n$  liefern. Dies verlangt

$$E_{ijkl\dots pq}^{(2n)} = \frac{2n+1}{2n-1} E_{ijkl\dots pq}^{(2n-2)}, \quad (22)$$

womit auch jener Faktor festgelegt wird. Aus den vorangehenden Feststellungen ergibt sich unmittelbar die Rekursion

$$E_{ijkl\dots pq}^{(2n)} = \frac{1}{2n-1} (\delta_{ij} E_{kl\dots pq}^{(2n-2)} + \delta_{ik} E_{jl\dots pq}^{(2n-2)} + \dots + \delta_{iq} E_{jkl\dots p}^{(2n-2)}). \quad (23)$$

An (21) anschließend, lassen sich damit die  $E_{ijkl\dots pq}^{(2n)}$  für beliebige  $n$  ausrechnen. Nebenbei bemerkt, stellen diese wegen  $E_{11\dots 11}^{(2n)} = E_{22\dots 22}^{(2n)} = E_{33\dots 33}^{(2n)} = 1$  in einem gewissen Sinne Verallgemeinerungen von  $\delta_{ij}$  dar.

Unter Verwendung von (20) und (23) erhält man bei geradem  $\nu$ , wofür  $\nu = 2\lambda$  gesetzt wird,

$$g_{iqrst}^{(2\lambda, \nu)} = \varepsilon_{ijq} \frac{(-1)^\nu}{3(2\lambda)! \nu!} \frac{\partial \overline{v}^2(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} ((a^{(\lambda\nu)}(t) - b^{(\lambda\nu)}(t)) \delta_{jk} E_{rst\dots t}^{(2\lambda)} + (2\lambda+1) b^{(\lambda\nu)}(t) E_{jkrst\dots t}^{(2\lambda+2)}) \quad (24)$$

mit

$$a^{(\lambda\nu)} = -\frac{4\pi}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} (f_1(t; \xi, -\tau) + (2\lambda+1) h_1(t; \xi, -\tau) + k_1(t; \xi, -\tau)) \xi^{2\lambda+3} \tau^\nu d\xi d\tau, \\ b^{(\lambda\nu)} = -\frac{4\pi}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} (f_1(t; \xi, -\tau) - h_1(t; \xi, -\tau)) \xi^{2\lambda+3} \tau^\nu d\xi d\tau. \quad (25)$$

Dabei sind alle die Anteile von  $g_{iqrst}^{(2\lambda, \nu)}$ , die bei Überschiebung mit  $\partial^{2\lambda+\nu} \overline{B}_q / \partial x_r \partial x_s \dots \partial x_t \partial \tau^\nu$  wegen  $\partial \overline{B}_q / \partial x_q = 0$  ohnehin bedeutungslos werden, weggelassen worden;  $b^{(0\nu)}$  geht gar nicht ein. Sofern  $\nu$  un-

gerade ist, soll  $\kappa = 2\lambda + 1$  gelten, und es ergibt sich

$$g_{iqr\dots t}^{(2\lambda+1,\nu)} = \varepsilon_{iqj} \frac{(-1)^\nu}{3(2\lambda)! \nu!} \overline{v}^2(\mathbf{x}, t) c^{(\lambda\nu)}(t) E_{jrs\dots t}^{(2\lambda+2)} \quad (26)$$

mit

$$c^{(\lambda\nu)} = - \frac{4\pi}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} f_0(t; \xi, -\tau) \xi^{2\lambda+3} \tau^\nu d\xi d\tau. \quad (27)$$

3. Wir greifen auf die Reihe (2) für  $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$  zurück und schreiben zunächst einige Anfangsglieder auf. Mit (15) und (16) findet man, wieder zur symbolischen Schreibweise übergehend,

$$\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'} = -\frac{1}{3} \left( a^{(00)} \text{grad } \overline{v}^2 \times \overline{\mathbf{B}} - a^{(01)} \text{grad } \overline{v}^2 \times \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + c^{(00)} \overline{v}^2 \text{rot } \overline{\mathbf{B}} - c^{(01)} \overline{v}^2 \text{rot } \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + \dots \right). \quad (28)$$

Für die vollständige Reihe gewinnt man mit (23), (24) und (26)

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'} = & -\frac{1}{3} a^{(00)} \text{grad } \overline{v}^2 \times \overline{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \sum_{\lambda+\nu \geq 1} \frac{(-1)^\nu}{(2\lambda)! \nu!} \left( a^{(\lambda\nu)} \text{grad } \overline{v}^2 \times \Delta^\lambda \frac{\partial^\nu \overline{\mathbf{B}}}{\partial t^\nu} \right. \\ & \left. + 2\lambda b^{(\lambda\nu)} (\text{grad } \overline{v}^2 \text{grad}) \text{rot } \Delta^{\lambda-1} \frac{\partial^\nu \overline{\mathbf{B}}}{\partial t^\nu} + c^{(\lambda\nu)} \overline{v}^2 \text{rot } \Delta^\lambda \frac{\partial^\nu \overline{\mathbf{B}}}{\partial t^\nu} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

4. Es sollen nun die in (28) auftretenden  $a^{(0\nu)}$  und  $c^{(0\nu)}$  mit  $\nu=0$  und  $\nu=1$  genauer betrachtet werden. Wir verwenden (4), (16), (19) und führen mit  $\xi = \eta \lambda_K$  und  $\tau = \vartheta \tau_K$  normierte Koordinaten  $\eta$  und  $\vartheta$  ein. Dann hat man

$$\begin{aligned} a^{(0\nu)} &= (\mu \sigma \lambda_K^2)^{\nu+1} (f_1^{(\nu)}(q) + h_1^{(\nu)}(q) + k_1^{(\nu)}(q)), \\ c^{(0\nu)} &= (\mu \sigma \lambda_K^2)^{\nu+1} f_0^{(\nu)}(q). \end{aligned} \quad (30)$$

Wenn wir für  $f_1$ ,  $h_1$ ,  $k_1$  oder  $f_0$  allgemein  $\varphi$  schreiben und  $\varphi(t; \xi, \tau) = \varphi^*(t; \eta, \vartheta)$  setzen, gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(q) &= \frac{q^{3/2-\nu}}{12\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-q\eta/4\vartheta} \\ &\quad \times \varphi^*(t; \eta, -\vartheta) \eta^4 \vartheta^{\nu-5/2} d\eta d\vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

Ferner gibt

$$q = \mu \sigma \lambda_K^2 / \tau_K \quad (32)$$

das Verhältnis der Zeit  $\mu \sigma \lambda_K^2$ , die für die Einstellung des elektrodynamischen Gleichgewichtes in einem  $\mathbf{B}'$ -Feld mit einer charakteristischen Länge  $\lambda_K$  maßgebend ist, zu der für das  $\mathbf{v}'$ -Feld charakteristischen Zeit  $\tau_K$  an. Im Grenzfall  $q=0$  darf man das  $\mathbf{B}'$ -Feld in jedem Augenblick als stationär betrachten, und es kann dem  $\mathbf{v}'$ -Feld um so weniger folgen, je größer  $q$  ist.

Um die Eigenschaften von  $\varphi^{(\nu)}(q)$  leicht erkennen zu können, führen wir in dem Doppelintegral (31) zwei verschiedene Substitutionen durch und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(q) &= \frac{2^{2(1-\nu)}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} \varphi^*(t; \eta, -\frac{q\eta^2}{4u^2}) \eta^{2\nu+1} u^{2(1-\nu)} d\eta du \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi} q^{\nu+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v^2} \varphi^*(t; 2\sqrt{\vartheta/q} \cdot v, -\vartheta) v^4 \vartheta^\nu dv d\vartheta. \end{aligned} \quad (33)$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$\varphi^{(\nu)}(0) = \frac{2^{2(1-\nu)}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2(1-\nu)} du \int_0^\infty \varphi^*(t; \eta, 0) \eta^{2\nu+1} d\eta = \frac{1}{3(\nu+1)} \int_0^\infty \varphi^*(t; \eta, 0) \eta^{2\nu+1} d\eta. \quad (34)$$

Falls  $\varphi^*(t; \eta, -\vartheta)$  mit wachsendem  $\vartheta$  monoton fällt, kann man aus dieser Zeile weiterhin schließen, daß sich  $\varphi^{(\nu)}(q)$  bezüglich  $q$  ebenso verhält. Das asymptotische Verhalten von  $\varphi^{(\nu)}(q)$  für  $q \rightarrow \infty$  wird nach der zweiten Zeile (33) durch

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(q) &\cong \frac{8}{3\sqrt{\pi} q^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-v^2} v^4 dv \int_0^\infty \varphi^*(t; 0, -\vartheta) \vartheta^\nu d\vartheta \\ &= \frac{1}{q^{\nu+1}} \int_0^\infty \varphi^*(t; 0, -\vartheta) \vartheta^\nu d\vartheta \end{aligned} \quad (35)$$

beschrieben. Für  $q=0$  ist also nur die räumliche, für  $q \rightarrow \infty$  nur die zeitliche Korrelation im  $\mathbf{v}'$ -Feld wesentlich.

Wir knüpfen bei (30) an und setzen

$$a^{(00)} = \frac{1}{2} \zeta c^{(00)}, \quad a^{(01)} = \frac{1}{2} \zeta' c^{(01)}, \quad (36)$$

wobei  $\zeta$  und  $\zeta'$  natürlich von  $q$  abhängen. Soweit

$$f_1^{(\nu)}(q) + k_1^{(\nu)}(q) + h_1^{(\nu)}(q) = \frac{1}{2} f_0^{(\nu)}(q) \quad (37)$$

gilt, hat man

$$\zeta = \zeta' = 1. \quad (38)$$

Jene Beziehung (37) muß wegen (9) wenigstens für  $q=0$  bestehen. Unter der weiteren Voraussetzung  $\text{div } \mathbf{v}' = 0$  läßt sie sich mit (10) sogar für beliebige  $q$  rechtfertigen. Im Falle  $\text{div } \mathbf{v}' \neq 0$  wird sie jedoch im allgemeinen nicht für beliebige  $q$  gelten; nach gewissen Plausibilitätsbetrachtungen, auf die wir hier nicht eingehen, sollten  $\zeta$  und  $\zeta'$  dann mit  $q$  wachsen.

Wir befassen uns nun mit  $c^{(00)}$  und  $c^{(01)}$ . Soweit  $f_0$  positiv ist, sind sie es ebenfalls. Für  $q=0$  findet man

$$c^{(0\nu)} = \frac{(\mu \sigma \lambda_K^2)^{\nu+1}}{3(\nu+1)} \int_0^\infty f_0^*(t; \eta, 0) \eta^{2\nu+1} d\eta. \quad (39)$$

Falls  $f_0^*(t; \eta, -\vartheta)$  mit wachsendem  $\vartheta$  monoton fällt, werden  $c^{(00)}$  und  $c^{(01)}$  bei festem  $\mu \sigma \lambda_K^2$  mit wachsendem  $q$ , also mit fallendem  $\tau_K$  kleiner. Für  $q \rightarrow \infty$  ergibt sich schließlich

$$c^{(0\nu)} = \tau_K^{\nu+1} \int_0^\infty f_0^*(t; 0, -\vartheta) \vartheta^\nu d\vartheta. \quad (40)$$

Diese Feststellungen über  $c^{(00)}$  und  $c^{(01)}$  lassen sich unmittelbar auf die beiden Bildungen

$$\chi = \frac{1}{6} \mu \sigma \bar{v}^2 c^{(00)}, \quad \chi \tau_R = \frac{1}{6} \mu \sigma \bar{v}^2 c^{(01)} \quad (41)$$

übertragen, die im folgenden Bedeutung erlangen werden. Während  $\chi$  dimensionslos ist, stellt  $\tau_R$  eine Zeit dar. Mit dem Ansatz (11) für  $f_0$  sowie mit (39) und (40) errechnet man für  $q=0$

$$\chi = \frac{1}{18} \mu^2 \sigma^2 \bar{v}^2 \lambda_K^2, \quad \tau_R = \mu \sigma \lambda_K^2 \quad (42)$$

und für  $q \rightarrow \infty$

$$\chi = \frac{1}{6} \sqrt{\pi/2} \mu \sigma \bar{v}^2 \tau_K, \quad \tau_R = \tau_R = \sqrt{2/\pi} \tau_K. \quad (43)$$

Wenn, wie üblich, eine magnetische Reynolds-Zahl  $Re_m = \mu \sigma \sqrt{v^2} \lambda_K$  eingeführt wird, hat man für  $q=0$  einfach  $\chi = \frac{1}{18} Re_m^2$ .

5. Nach dem Vorbild der vorangehenden Überlegungen lassen sich die Eigenschaften von  $a^{(\lambda\nu)}$ ,  $b^{(\lambda\nu)}$

und  $c^{(\lambda\nu)}$  auch für beliebige  $\lambda$  und  $\nu$  ergründen. Es interessieren aber im folgenden, sobald  $\lambda \geq 1$  oder  $\nu \geq 2$  ist, nur gewisse Abschätzungen. Diese fallen für  $a^{(\lambda\nu)}$  und  $b^{(\lambda\nu)}$  bei geeigneten Annahmen über  $f_1$ ,  $h_1$  und  $k_1$  sinngemäß gleich aus wie für  $c^{(\lambda\nu)}$  mit dem durch (11) festgesetzten  $f_0$  und werden deshalb nur dafür angegeben.

Indem man (4) und (11) in (27) einsetzt, die Integration über  $\xi$  ausführt und wieder  $\tau = \vartheta \tau_K$  sowie (32) verwendet, ergibt sich

$$c^{(\lambda\nu)} = \frac{(2\lambda)!}{2^\lambda \lambda!} \lambda_K^{2\lambda} \tau_K^{\nu+1} (q/2)^{5/2} \int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta^2/2} \vartheta^{\lambda+\nu} d\vartheta}{(\vartheta + q/2)^{\lambda+5/2}}. \quad (44)$$

Daraus ist

$$c^{(\lambda\nu)} < \sqrt{(2\lambda)!} \lambda_K^{2\lambda} c^{(0\nu)} \quad (45)$$

und weiterhin

$$c^{(0\nu)} < \sqrt{\nu!} \tau_K^\nu c^{(00)} \quad (46)$$

zu folgern. Wir fassen beides zu

$$\frac{c^{(\lambda\nu)}}{(2\lambda)! \nu!} < \frac{\lambda_K^{2\lambda} \tau_K^\nu c^{(00)}}{\sqrt{(2\lambda)! \nu!}} \quad (47)$$

zusammen, worauf wir bald zurückkommen werden.

## Diskussion der Ergebnisse

1. Unsere Aufmerksamkeit richtet sich in erster Linie auf die Terme von  $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ , die in (28) angegeben sind. Mit Rücksicht auf (36) und (41) schreiben wir

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'} &= -\frac{\zeta}{\mu \sigma} \text{grad } \chi \times \left( \bar{\mathbf{B}} - \frac{\zeta'}{\zeta} \tau_R \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{2\chi}{\mu \sigma} \text{rot} \left( \bar{\mathbf{B}} - \tau_R \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Auf Grund dessen läßt sich die letzte Beziehung (1), wo voraussetzungsgemäß  $\mathbf{v} = 0$  ist, in

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{j}} - \frac{2\chi \tau_R}{1+2\chi} \frac{\partial \bar{\mathbf{j}}}{\partial t} &= \frac{\sigma}{1+2\chi} \bar{\mathbf{E}} \\ &\quad - \frac{\zeta \text{grad } \chi}{1+2\chi} \times \left( \bar{\mathbf{H}} - \frac{\zeta'}{\zeta} \tau_R \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

umwandeln. Damit haben wir eine spezielle Form des Ohmschen Gesetzes für die mittleren Felder gewonnen.

Bevor wir die Aussagen erörtern, welche in (49) enthalten sind, gehen wir noch einmal auf die bei der Ableitung verwendeten Voraussetzungen ein.

Es ist nur der Fall  $\bar{v} = 0$  betrachtet und eine erste Näherung für kleine  $v'$  behandelt worden. Wir verweisen auf die Beziehungen (I. 13) bis (I. 22) und erinnern daran, daß man zu jener ersten Näherung gelangt, indem man  $C = 0$  setzt. An Hand von (I. 13) und (I. 14) läßt sich abschätzen, wie weit das letztere berechtigt ist. Als hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der verwendeten Näherung finden wir so, falls die relativen räumlichen und zeitlichen Änderungen von  $\bar{B}$  nicht größer als die von  $v'$  sind,  $Re_m = \mu \sigma \sqrt{v'^2} \lambda_K \ll 1 + q$ . Für  $q = 0$  ist dies gleichbedeutend mit  $\sqrt{v'^2} \ll \lambda_K / \tau_K$ , muß also beispielsweise verlangen, daß sich  $(v' \text{ grad}) v'$  gegenüber  $\partial v' / \partial t$  als unwesentlich erweist. Es tritt darin eine beträchtliche Einschränkung zutage. Für  $q \rightarrow \infty$  läßt sich jene Gültigkeitsbedingung auch in  $\sqrt{\chi/q} \ll 1$  umschreiben, woraus hervorgeht, daß  $\chi$  durchaus nicht immer klein sein muß.

Daß für den Anfangszeitpunkt einfach  $t_0 \rightarrow -\infty$  gewählt wurde, ist für das Folgende bedeutungslos.

Mit dem Ansatz für  $R_{jp}$  haben wir weiter festgelegt, daß die  $v'$ -Felder nur durch das Auftreten eines endlichen  $\text{grad } \sqrt{v'^2}$  von denen bei homogener isotroper und spiegelsymmetrischer Turbulenz abweichen dürfen. So bleibt insbesondere die Rückwirkung von  $B$  auf  $v'$  unbeachtet, was sich nur für nicht zu große  $B$  rechtfertigen läßt.

Schließlich sind lediglich die in (28) ausgeschriebenen Anfangsglieder der mit (29) vollständig angegebenen Reihe für  $\bar{v}' \times \bar{B}'$  berücksichtigt worden. Abschätzungen wie (47) lassen erkennen, wann dies erlaubt ist. Es kommt im wesentlichen darauf an, daß man  $\lambda_K^2 \partial^2 \bar{B} / \partial x_i \partial x_j$ ,  $\tau_K^2 \partial^2 \bar{B} / \partial t^2$  und derartige Ausdrücke mit höheren Ableitungen gegenüber  $\bar{B}$  vernachlässigen darf. Natürlich können solche Abschätzungen nur hinreichende Bedingungen, nicht aber notwendige liefern.

2. Wir befassen uns zunächst mit dem Fall der homogenen isotropen und spiegelsymmetrischen Turbulenz und setzen dementsprechend  $\text{grad } \chi = 0$ . Darüber hinaus beschränken wir uns auf stationäre Verhältnisse, so daß  $\partial \bar{j} / \partial t = 0$  ist. Dann geht (49) in

$$\bar{j} = \sigma_T \bar{E} \quad (50)$$

über, wobei  $\sigma_T = \sigma / (1 + 2\chi)$  (51)

gilt. Dies entspricht (I. 11) mit  $\alpha = 0$  und (I. 12); das dort als unbekannt zu betrachtende  $\beta$  wird hier im wesentlichen durch  $\chi$  vertreten.

Unter der durch experimentelle Ergebnisse nahegelegten Annahme eines nicht negativen  $f_0$  ergab sich, daß  $\chi$  positiv sein muß. Dann liegt die für die mittleren Felder maßgebende turbulenzbedingte Leitfähigkeit  $\sigma_T$  stets unter der substanzeigenen  $\sigma$ . Aber auch wenn man für  $f_0$  in einem gewissen Maße negative Werte zuläßt, könnte  $\chi$  noch positiv ausfallen und die letztere Aussage gültig bleiben. Umgekehrte Größenverhältnisse von  $\sigma_T$  und  $\sigma$ , die ein noch stärker negatives, zu negativem  $\chi$  führendes  $f_0$  erfordern würden, erscheinen auf Grund von Entropiebetrachtungen als unmöglich.

Mit dem Ansatz (11) für  $f_0$  gelangt man im Grenzfall  $q = 0$ , für den (42) gilt, zu

$$\sigma_T = \sigma / (1 + \frac{1}{3} \mu^2 \sigma^2 v'^2 \lambda_K^2). \quad (52)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit einem 1963 von STEENBECK<sup>5</sup> veröffentlichten überein. Behalten wir den Ansatz (11) für  $f_0$  bei, gehen aber zu  $q \rightarrow \infty$  über und verwenden (43), so folgt

$$\sigma_T = \sigma / (1 + \frac{1}{3} \sqrt{\pi/2} \mu \sigma \sqrt{v'^2} \tau_K). \quad (53)$$

Während der Grenzübergang  $\sigma \rightarrow \infty$  für  $q = 0$  aus dem Gültigkeitsbereich des verwendeten Näherungsverfahrens herausführt, ist er für  $q \rightarrow \infty$ , wobei natürlich  $\sqrt{v'^2} \ll \lambda_K / \tau_K$  gewahrt bleiben muß, durchaus erlaubt. Damit gestattet (53) den Schluß, daß ein im Kleinen ideal leitendes Medium im Großen eine endliche Leitfähigkeit zeigt. Ein derartiger Gedanke ist bereits 1961 von CSADA<sup>6</sup> geäußert worden. Seine wie auch unsere Schlußweise sind aber mit dem Mangel behaftet, daß sie von isotroper Turbulenz ausgehen. Im Grenzfall  $\sigma \rightarrow \infty$  dürfte die Störung der Isotropie durch das  $\bar{B}$ -Feld, auch wenn es als schwach vorausgesetzt wird, nicht ohne weiteres zu vernachlässigen und die Wirkung der Turbulenz auf die mittleren Felder daher nicht allein durch das Auftreten einer endlichen Leitfähigkeit zu beschreiben sein.

Ein interessantes Beispiel liefert die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne, für die man mit

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad \text{und} \quad \sigma \approx 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1},$$

ferner mit

$$\sqrt{v'^2} \approx 4 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}, \quad \lambda_K \approx 10^5 \text{ m} \quad \text{und} \quad \tau_K \approx 10^2 \text{ s}$$

<sup>5</sup> M. STEENBECK, Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin 5, 625 [1963].

<sup>6</sup> I. K. CSADA, Vortrag auf dem Symposium über theoretische Physik in Balatonföldvár im September 1961 (unveröffentlicht).

rechnen darf<sup>7</sup>. Dies entspricht dem Grenzfall  $q \rightarrow \infty$ ; allerdings ist  $\sqrt{v'^2} \ll \lambda_K/\tau_K$  nur sehr schlecht erfüllt. Setzen wir uns über letzteres hinweg und benutzen (53), so folgt  $\sigma_T \approx 10^{-4} \sigma$ . Wir finden dieses Ergebnis vor allem deshalb bemerkenswert, weil sich die Zeitskala der magnetischen Erscheinungen auf der Sonne nur verstehen läßt, wenn man die magnetische Zähigkeit, also das reziproke Produkt aus Permeabilität und Leitfähigkeit um etwa vier Zehnerpotenzen größer ansetzt als es den oben genannten Werten entspricht<sup>7</sup>.

Wir haben  $\sigma_T$  mit (50), also auf Grund einer linearen Verknüpfung zwischen  $\bar{\mathbf{j}}$  und  $\bar{\mathbf{E}}$  eingeführt. Man könnte beispielsweise eine Größe  $\sigma_T^*$  durch die in  $\bar{\mathbf{j}}$  nichtlineare Beziehung  $\bar{\mathbf{j}}^2/\sigma = (\bar{\mathbf{j}})^2/\sigma_T^*$  erklären. Es sei betont, daß  $\sigma_T$  und  $\sigma_T^*$  durchaus nicht übereinstimmen müssen.

3. Wir bleiben noch bei homogener isotroper und spiegelsymmetrischer Turbulenz, also bei  $\text{grad } \chi = 0$ , lassen aber instationäre Verhältnisse und damit  $\partial \bar{\mathbf{j}}/\partial t \neq 0$  zu. Auf Grund von (49) ist dann (50) durch

$$\bar{\mathbf{j}} - \tau_R' \frac{\partial \bar{\mathbf{j}}}{\partial t} = \sigma_T \bar{\mathbf{E}} \quad (54)$$

zu ersetzen, wobei neben (51) noch

$$\tau_R' = 2 \chi \tau_R / (1 + 2 \chi) \quad (55)$$

verwendet wurde.

Der Annahme über ein nicht negatives  $f_0$  entsprechend, betrachten wir  $\chi$  und  $\tau_R$  und damit  $\tau_R'$  als positiv. Dann ist (54) so zu deuten, daß das in einem gegebenen Zeitpunkt vorhandene  $\bar{\mathbf{E}}$  nicht mit dem im gleichen, sondern mit dem in einem vorangehenden Zeitpunkt auftretenden  $\bar{\mathbf{j}}$  verknüpft ist. Ein Medium, das im Kleinen eine rein Ohmsche Leitfähigkeit besitzt, zeigt also im Großen einen kapazitiven Charakter. Im Sinne der komplexen Wechselstromrechnung wird dies durch eine komplexe turbulenzbedingte Leitfähigkeit  $\hat{\sigma}_T$  beschrieben. Für Vorgänge mit der Kreisfrequenz ergibt sich

$$\hat{\sigma}_T = \sigma_T / (1 - i \omega \tau_R'), \quad (56)$$

wobei  $i = \sqrt{-1}$  ist.

4. Endlich lassen wir einen Gradienten in der Turbulenzintensität und mithin  $\text{grad } \chi \neq 0$  zu. Der

Einfachheit halber betrachten wir aber nur stationäre Verhältnisse, setzen also  $\partial \bar{\mathbf{j}}/\partial t = \partial \bar{\mathbf{H}}/\partial t = 0$ . Aus (49) folgt dann

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_T \bar{\mathbf{E}} - \frac{\chi \text{ grad } \chi}{1 + 2 \chi} \times \bar{\mathbf{H}}. \quad (57)$$

Wo  $\text{grad } \chi \neq 0$  ist, werden durch  $\chi = \text{const}$  Flächen definiert. Die Ströme, welche dem letzten Term in (57) entsprechen, fließen in diesen Flächen und im übrigen senkrecht zu  $\bar{\mathbf{H}}$ .

Wir wollen die Eigenart dieser Ströme an einem Beispiel erläutern. Wie in Abb. 1 angedeutet, soll  $\text{grad } \chi$  nur innerhalb einer Kugelschale gleichmäßiger Dicke von Null abweichen und dort radial einwärts weisen. Dies bedeutet, daß  $\chi$  innerhalb der inneren und außerhalb der äußeren Begrenzungsfläche dieser Kugelschale jeweils konstant, im ersten Bereich aber größer als im letzteren ist. In einer nullten Näherung, in der der Einfluß von  $\text{grad } \chi$  völlig vernachlässigt wird, sei  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_0$ ,  $\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_0, \dots$ . Wir setzen voraus, daß  $\bar{\mathbf{B}}_0$  und damit  $\bar{\mathbf{H}}_0$  homogene Felder darstellen. Daraus folgt  $\bar{\mathbf{E}}_0 = \bar{\mathbf{j}}_0 = 0$ . Bei der ersten Näherung, in der  $\text{grad } \chi$  als kleine Größe berücksichtigt wird, schreiben wir  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_1, \dots$ . Wie sich leicht zeigen läßt, hat man  $\bar{\mathbf{E}}_1 = 0$ , während  $\bar{\mathbf{j}}_1$  nicht durchweg verschwindet. Die  $\bar{\mathbf{j}}_1$  entsprechen

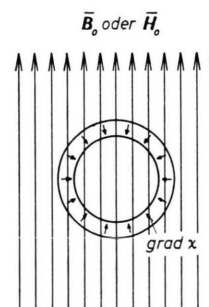


Abb. 1. Verteilung von  $\text{grad } \chi$  sowie Magnetfeld in nullter Näherung.

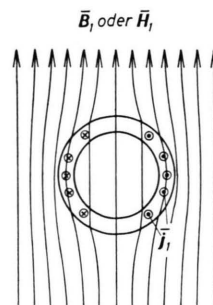


Abb. 2. Strom und Magnetfeld in erster Näherung.

<sup>7</sup> Die in diesem Zusammenhang wesentlichen sonnenphysikalischen Fakten sind unter Hinweis auf die einschlägige Literatur zusammengestellt bei M. STEENBECK u. F. KRAUSE, Z. Naturforsch. **21 a**, 1285 [1966].

den Stromlinien verlaufen innerhalb der betrachteten Kugelschale und bilden dort konzentrische Kreise in zu  $\mathbf{B}_0$  senkrechten Ebenen. Unter der Annahme  $\zeta > 0$  findet man die in Abb. 2 angezeigte Richtung von  $\mathbf{j}_1$  und das dort skizzierte Feldlinienbild für  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{H}_1$ . Höhere Näherungen bringen keine wesentliche Änderung des Sachverhaltes, der sich in der ersten ergibt.

Wenn die durch  $\bar{\mathbf{j}}_1$  beschriebenen Ströme trotz Ohmscher Verluste nicht abklingen, so muß ihnen Energie aus der turbulenten Bewegung des Mediums zugeführt werden. Im Sinne der Redeweise, die wir in I eingeführt haben, besitzt also ein Medium bei ortsabhängigem  $\chi$  einen aktiven Charakter. Diese Bemerkung wird dadurch unterstrichen, daß man sich Anordnungen mit einem inhomogen turbulenten Medium, Elektroden und Spulen denken kann, die als selbsterregte Generatoren wirken.

Beim Übergang zu instationären Verhältnissen sind ähnliche Erscheinungen wie jene zu erwarten, die das kapazitive Verhalten des Mediums ausmachen. Wir verzichten aber darauf, diese genauer zu erörtern.

5. Die Verteilung des magnetischen Flusses im vorangehenden Beispiel läßt sich, solange  $\zeta > 0$  gilt, durch sein Bestreben kennzeichnen, das Gebiet mit höherer Turbulenzintensität, also mit größerem  $\chi$  zu meiden. Dies bringt den Gedanken nahe, neben der turbulenzbedingten Leitfähigkeit eine neue Permeabilität einzuführen, die um so mehr unter der substanzeigenen Permeabilität liegt, je größer  $\chi$  ist. Während sich aber die turbulenzbedingte Leitfähigkeit nahezu zwangsläufig ergab, ist es bei einer solchen Permeabilität keineswegs so. Ihrer Einführung steht zunächst die Gültigkeit der in (1) auftretenden Beziehung  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  im Wege. Außerdem ist der mit grad  $\chi$  verknüpfte Anteil von  $\bar{\mathbf{j}}$  in (49) und (57) im allgemeinen nicht quellenfrei und deshalb kaum als Magnetisierungsstromdichte zu deuten. Wenn man dennoch eine von der substanzeigenen abweichende Permeabilität haben möchte, so müssen völlig neue Gesichtspunkte herangezogen werden.

Um den weiteren Weg ein wenig zu erläutern, betrachten wir zunächst den Übergang von einem einfachen mikroskopischen Bild zur makroskopischen Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge in leitfähiger, magnetisch und elektrisch polarisierbarer Materie.

Mikroskopisch gesehen, zeigen alle elektromagnetischen Feldgrößen heftige räumliche und zeitliche

Schwankungen. Die makroskopische magnetische Kraftflußdichte und die makroskopische elektrische Feldstärke gehen durch eine Mittelung, die eine räumliche und zeitliche Glättung bewirkt, aus den entsprechenden mikroskopischen Größen hervor. Hingegen unterscheidet sich die makroskopische magnetische Feldstärke im allgemeinen von der gemittelten mikroskopischen, und zwar um die Magnetisierung. Man faßt die letztere als gemittelte magnetische Momentendichte auf, wobei die in Rechnung zu setzenden magnetischen Momente, soweit sie nicht mit Spins verknüpft sind, aus speziellen mikroskopischen Ladungsbewegungen abgeleitet werden. Ähnliches gilt für dielektrische Verschiebung und dielektrische Polarisierung. Weiterhin ergibt sich nicht etwa der makroskopische Leitungsstrom, wenn das Mittel über die entsprechende mikroskopische Größe, also über alle mikroskopischen Ladungsbewegungen genommen wird; es kommt dabei vielmehr eine Summe aus diesem Leitungsstrom, dem Magnetisierungsstrom und dem dielektrischen Polarisationsstrom heraus. Ein sinngemäß gleicher Sachverhalt zeigt sich bei der wahren Ladung und der Polarisationsladung.

Der skizzierte Übergang zwischen den beiden Beschreibungsarten sichert die Gültigkeit der Maxwell-Gleichungen, soweit sie für die mikroskopischen Feldgrößen besteht, auch für die makroskopischen. Die Materialgleichungen müssen jedoch im allgemeinen durch neue ersetzt werden, wobei Magnetisierung und dielektrische Polarisierung Bedeutung erlangen.

Es liegt nahe, die in turbulenten leitenden Medien auftretenden Feldgrößen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{j}$  angesichts ihrer räumlichen und zeitlichen Schwankungen mit jenen mikroskopischen zu vergleichen. Wir nennen erstere hier „lokale“ Feldgrößen, stellen ihnen „globale“  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{j}$  gegenüber und erklären letztere ähnlich jenen makroskopischen durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \bar{\mathbf{B}}, & \mathfrak{E} &= \bar{\mathbf{E}}, \\ \mathfrak{H} &= \bar{\mathbf{H}} - \mathfrak{M}, & \mathfrak{j} &= \bar{\mathbf{j}} - \text{rot } \mathfrak{M}; \end{aligned} \quad (58)$$

über  $\mathfrak{M}$  soll noch verfügt werden. Damit ergibt sich aus der ersten Zeile (1) zunächst

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{j}, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad (59)$$

und aus der zweiten Zeile (1) mit Rücksicht auf (48) weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \mu(\mathfrak{H} + \mathfrak{M}), \\
\mathbf{j} &= \sigma \mathfrak{E} - \operatorname{rot} \mathfrak{M} - \frac{\zeta}{\mu} \operatorname{grad} \chi \times \left( \mathfrak{B} - \frac{\zeta'}{\zeta} \tau_R \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \\
&\quad - 2 \frac{\chi}{\mu} \operatorname{rot} \left( \mathfrak{B} - \tau_R \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \quad (60) \\
&= \sigma \mathfrak{E} - \operatorname{rot} \left( \mathfrak{M} + \frac{\zeta \chi}{\mu} \left( \mathfrak{B} - \frac{\zeta'}{\zeta} \tau_R \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \right) \\
&\quad - \frac{(2-\zeta) \chi}{\mu} \operatorname{rot} \left( \mathfrak{B} - \frac{2-\zeta'}{2-\zeta} \tau_R \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Falls  $\mu$  die Vakuumpermeabilität darstellt, spielt  $\mathfrak{M}$  offenbar die Rolle einer Magnetisierung. Wir legen letzteres durch

$$\mathfrak{M} = - \frac{\zeta \chi}{\mu} \left( \mathfrak{B} - \frac{\zeta'}{\zeta} \tau_R \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \quad (61)$$

fest. Indem wir uns noch auf  $\chi \ll 1$  beschränken und Terme von zweiter und höherer Ordnung in  $\chi$  streichen, ergibt sich aus (60) und (61) schließlich

$$\mathfrak{B} - \tau_\mu \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mu_g \mathfrak{H}, \quad \mathbf{j} - \tau_\sigma \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \sigma_g \mathfrak{E} \quad (62)$$

mit

$$\begin{aligned}
\tau_\mu &= \zeta' \chi \tau_R, & \mu_g &= \mu / (1 + \zeta \chi), \\
\tau_\sigma &= (2 - \zeta') \chi \tau_R, & \sigma_g &= \sigma / (1 + (2 - \zeta) \chi).
\end{aligned} \quad (63)$$

Die globalen Feldgrößen befriedigen also, soweit es in diesem Zusammenhang interessiert, die Maxwell-Gleichungen. Die Materialgleichungen für diese Feldgrößen sind erstens durch das Auftreten einer globalen Permeabilität  $\mu_g$  und einer globalen Leitfähigkeit  $\sigma_g$  und zweitens dadurch gekennzeichnet, daß sie Hystereseerscheinungen und Abweichungen von rein Ohmschem Verhalten beschreiben, wofür die Zeitkonstanten  $\tau_\mu$  und  $\tau_\sigma$  maßgebend sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf  $\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$  oder setzen  $q = 0$ , um mit  $\zeta = \zeta' = 1$  rechnen zu können. Indem wir  $\chi$  und  $\tau_R$  wieder als positiv betrachten, ergibt sich dann  $\mu_g/\mu = \sigma_g/\sigma < 1$  und  $\tau_\mu = \tau_\sigma > 0$ . Beim Übergang von lokalen zu globalen Feldern sind also die Werte von Permeabilität und

Leitfähigkeit im gleichen Verhältnis zu erniedrigen. Im instationären Fall eilt die magnetische Induktion dem magnetischen Feld voraus, und das Medium zeigt einen kapazitiven Charakter. Für  $\operatorname{div} \mathbf{v}' \neq 0$  und  $q \neq 0$  müßten als erstes  $\zeta$  und  $\zeta'$  berechnet werden, womit wir uns aber nicht befassen wollen. Soweit  $\zeta > 0$  bleibt, was nach der oben erwähnten Plausibilitätsbetrachtung zu erwarten ist, gilt auch weiterhin  $\mu_g/\mu < 1$ . Dagegen ist  $\sigma_g/\sigma < 1$  an  $\zeta < 2$  gebunden, und wir müssen offenlassen, inwieweit sich dies als richtig erweist.

In diesem Zusammenhang ist der Unterschied zwischen  $\sigma_T$  und  $\sigma_g$  wesentlich. Während  $\sigma_T$  nahezu zwangsläufig eingeführt wurde und unmittelbar physikalische Bedeutung besitzt, ergab sich  $\sigma_g$  auf Grund einer mehr oder weniger willkürlichen Aufteilung von  $\bar{\mathbf{j}}$  in  $\mathbf{j}$  und  $\operatorname{rot} \mathfrak{M}$ , deren Ziel allein darin bestand, eine globale Permeabilität sinnvoll erklären zu können. Für  $\zeta = 1$  gilt

$$(\sigma - \sigma_T)/\sigma = 2(\sigma - \sigma_g)/\sigma = 2(\mu - \mu_g)/\mu.$$

Unsere Auffassung von einer turbulenzbedingten Permeabilitätsänderung unterscheidet sich sehr stark von der, die CSADA 1951<sup>8</sup> entwickelte. Wir haben die letztere schon an anderer Stelle kritisiert<sup>9</sup>. Die von STEENBECK 1963<sup>5</sup> angegebene Permeabilitätsänderung fügt sich in einem gewissen Maße in das Vorangehende ein.

Die Möglichkeit, unsere Ergebnisse für  $\chi \ll 1$  mit Hilfe jener globalen Felder zu formulieren, mag zuweilen insofern nützlich sein, als dann die in (49) enthaltenen Aussagen durch die übersichtlichen Beziehungen (62) wiedergegeben werden. Auf Grund von (58) und (61) lassen sich aus den globalen stets die entsprechenden mittleren Felder ausrechnen.

Von einigen Erweiterungen abgesehen, stellt sowohl die vorangehende als auch diese Untersuchung einen Auszug aus meiner Dissertation<sup>9</sup> dar. Letztere wurde von Herrn Prof. M. STEENBECK angeregt und von ihm sowie Herrn Dr. F. KRAUSE durch zahlreiche eingehende Diskussionen gefördert, wofür ich herzlich danke.

<sup>8</sup> I. K. CSADA, Acta Phys. Hung. 1, 235 [1951].

<sup>9</sup> K.-H. RÄDLER, Dissertation, Universität Jena 1966.